Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Matemática - FAMAT
Coordenação dos Cursos de Bacharelato e Licenciatura em Matemática

Trabalho de Conclusão de Curso

Uma Introdução ao Estudo de Espaços Métricos e Normados

Aluna: Stefânia Carvalho de Sousa
Orientador: Fábio José Bertoloto

Stefânia Carvalho de Sousa

Uma Introdução ao Estudo de Espaços Métricos e Normados

Trabalho apresentado à Faculdade de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de licenciado em matemática

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Faculdade de Matemática

Orientador: Prof. Dr. Fábio José Bertoloto

Uberlândia-MG

2021

Stefânia Carvalho de Sousa

Uma Introdução ao Estudo de Espaços Métricos e Normados

Trabalho apresentado à Faculdade de Matemática, como parte dos requisitos para obtenção do título de licenciado em matemática

Trabalho aprovado. Uberlândia-MG, ***28 de outubro de 2021***:

Prof. Dr. Fábio José Bertoloto
Orientador

Prof. Dra. Sônia Sarita Berrios Yana

Prof. Dr. Jocelino Sato

Uberlândia-MG
2021

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me guiado e abençoado em toda minha jornada até aqui.

Agradeço aos meus pais Edvan e Thaisy por todo amor, apoio e por sempre acreditarem em mim. Por serem minha base, suporte e inspiração. Por lutarem e trabalharem tanto para que eu conseguisse chegar até aqui. Obrigada por tudo, amo muito vocês. Essa conquista, com toda certeza é nossa!

Agradeço as minhas irmãs Nicole e Isabella por estarem comigo nos momentos de dificuldades e alegrias e por toda paciência nos momentos de desespero. E ao meu irmão Vitor Gabriel pelas brincadeiras e carinho que tornavam os meus dias mais leves. Amo vocês!

Agradeço também aquele que compartilhou comigo a maior experiência da minha vida, fazer intercâmbio em Portugal, e que hoje compartilha a vida. Maurício, amo você, obrigada por hoje e por todos os dias que virão.

Agradeço aos meus avós, meus tios, tias, primos, primas, madrinhas e padrinhos que sempre me apoiaram e participaram da minha jornada.

Ao professor Fábio agradeço pelos dois anos de orientação, por toda paciência, conselhos e ensinamentos. Você é um exemplo e inspiração de professor.

Agradeço ao professor Vlademir Marim por ter me acompanhado e auxiliado durante o ano de intercâmbio em Portugal. Agradeço também ao professor Arlindo pela ajuda neste processo. E agradeço a CAPES pelo apoio financeiro. Participar deste programa foi a experiência mais incrível de toda minha graduação, estudar na Universidade de Coimbra contribuiu de forma significativa na minha formação.

Agradeço a todos os professores e professoras que passaram pelo meu caminho. Vocês foram essenciais para que eu chegasse aqui. E agradeço também a todas as amizades que fiz durante este curso, pela companhia.

Agradeço ainda à professora Sônia e ao professor Sato, por aceitarem participar dessa banca, se dispondo a analisar e dar sugestões à este trabalho.

"Não é o que o mundo reserva para você, mas o que você traz para o mundo."

RESUMO

Neste trabalho, apresentaremos noções topológicas de espaços métricos, espaços normados completos, espaços de Banach, incluindo espaços normados de sequências. Também demonstraremos as Desigualdades de Hölder e Minkowski e apresentaremos os espaços ℓ_p e ℓ_∞. Além disso, daremos exemplos e estudaremos as principais propriedades dos espaços normados de dimensão finita.

Palavras-chave: Espaços métricos, Espaços Normados, Espaços de Banach.

ABSTRACT

In this work we will present topological notions of metric spaces, complete normed spaces, Banach spaces, including sequence normed spaces. We will also demonstrate as Hölder and Minkowski Inequalities and present the spaces ℓ_p and ℓ_∞. In addition, we will give examples and study the main properties of finite-dimensional normed spaces..

Keywords: Metric Spaces, Normed Spaces, Banach Spaces.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O estudo da Análise Funcional tem como foco principal os espaços vetoriais normados, entre eles os espaços de Banach, e as transformações lineares contínuas entre tais espaços. O conceito de norma surgiu entre 1920 e 1922 em trabalhos publicados por alguns matemáticos, entre eles Stefan Banach.

Stefan Banach foi um matemático polonês que contribuiu de forma significativa aos estudos de Análise Funcional. Em 1932 publicou o seu trabalho mais importante, Théorie des Opérations Linéaires (Teoria dos Operadores Lineares). Dentre muitas de suas contribuições, os espaços normados completos, que receberam o nome de espaços de Banach em sua homenagem, serão utilizados neste trabalho.

No primeiro capítulo, apresentamos noções topológicas em espaços métricos, conceitos preliminares úteis para resultados posteriores, dentre eles, definição de métrica, conjunto aberto, fechado e compacidade de espaços métricos.

Um espaço métrico será definido a partir de um conjunto e uma métrica. Neste sentido, mostraremos no Capítulo 2 que um mesmo conjunto com métricas diferentes apresentam diferenças em propriedades notáveis.

Outros objetivos deste trabalho são as apresentações dos espaços ℓ_p e ℓ_∞, estudando a separabilidade destes espaços normados de sequência, bem como mostrando que os mesmos constituem exemplos de espaços de Banach.

Por fim, estudaremos algumas propriedades de transformações lineares sobre espaços de dimensão finita.

Sempre trabalharemos com o corpo como sendo $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1 ALGUNS CONCEITOS E PROPRIEDADES INICIAIS

1.1 ENUMERABILIDADE

Definição 1.1. Um conjunto X é finito quando é vazio ou se existem $n \in \mathbb{N}$ e uma bijeção $f\colon I_n \longrightarrow X$, sendo $I_n = \{p \in \mathbb{N}; p \leq n\}$. Escrevendo $x_1 = f(1), x_2 = f(2), \cdots, x_n = f(n)$ temos então $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$. A bijeção f chama-se uma contagem de elementos de X e o número n chama-se o número de elementos, ou número cardinal do conjunto finito X.

Definição 1.2. Um conjunto X diz-se enumerável quando é finito ou quando existe uma bijeção $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$.

Exemplo 1.3. O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é enumerável. De fato, basta ordená-lo como segue:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots.$$

Teorema 1.4. *Todo subconjunto de um conjunto finito é finito.*

Demonstração. Mostremos o seguinte caso inicial: se X é finito e $a \in X$, então $X - \{a\}$ é finito. Com efeito, existe uma bijeção, para algum $n \in \mathbb{N}$, $f\colon I_n \longrightarrow X$, a qual podemos supor que cumpre, sem perda de generalidade, $f(n) = a$. Se $n = 1$ então $X - \{a\} = \emptyset$ é finito. Se $n > 1$, a restrição de f a I_{n-1} é uma bijeção sobre $X - \{a\}$. Logo $X - \{a\}$ é finito e tem $n - 1$ elementos.

O caso geral se prova por indução no número n de elementos de X. Ele é evidente quando $X = \emptyset$ ou $n = 1$. Supondo o Teorema verdadeiro para conjuntos de n elementos, sejam X um conjunto com $n+1$ elementos e Y um subconjunto de X. Se $Y = X$, nada há o que provar. Caso contrário, existe $a \in X$ com $a \notin Y$. Então, na realidade, $Y \subset X - \{a\}$. Como $X - \{a\}$ tem n elementos, segue-se que Y é finito. □

Corolário 1.5. *Um subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é finito se, e somente se, é limitado.*

Demonstração. Se $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{N}$ é finito. Seja $p = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, vemos que $x \in X \Rightarrow x \leq p$. Logo X é limitado. Reciprocamente, se $X \subset \mathbb{N}$ é limitado então $X \subset I_p$, para algum $p \in \mathbb{N}$. Segue do Teorema 1.4 que X é finito. □

Teorema 1.6. *Todo subconjunto $X \subset \mathbb{N}$ é enumerável.*

Demonstração. Se X é finito, nada há a provar. Seja X infinito. Escolhemos x_1 como sendo o menor elemento[1] de X e definimos $A_1 = X - \{x_1\}$. Seja x_2 o menor elemento de A_1. Escrevemos $A_2 = X - \{x_1, x_2\}$. E, assim, por indução, dado $n \in \mathbb{N}$, podemos escolher x_n como o menor elemento de A_{n-1} e escrever $A_n = X - \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ Ocorre que $A_n \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois X é infinito. Notemos, ainda, que para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

Se existisse $x \in X$ diferente de todo x_n, então $x \in A_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. No caso, x seria maior que todos os elementos do conjunto infinito $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, ou seja, esse conjunto seria limitado. Mas, só subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$ podem ser limitados (ver [3, pag.7, Corolário 2]).

□

Corolário 1.7. *Seja $f\colon X \longrightarrow Y$ injetora. Se Y é enumerável, então X também é. Em particular, todo subconjunto de um conjunto enumerável é enumerável.*

Demonstração. Segue da hipótese que existe uma bijeção $\varphi\colon Y \longrightarrow \mathbb{N}$. Então, $\varphi \circ f\colon X \longrightarrow \mathbb{N}$ é uma bijeção de X sobre um subconjunto C de $\mathbb{N}$, que é enumerável pelo Teorema 1.6. Por ser enumerável, existe uma bijeção $h\colon C \longrightarrow \mathbb{N}$. Como $f \circ \varphi\colon X \longrightarrow C$ é bijetora, concluímos que há uma bijeção de X em $\mathbb{N}$ e, portanto, que X é enumerável por definição. No caso particular, $X \subset Y$, tomamos $f\colon X \longrightarrow Y$ igual a aplicação inclusão. □

Corolário 1.8. *Seja $f\colon X \longrightarrow Y$ sobrejetiva. Se X é enumerável, então Y também é.*

Demonstração. Para cada $y \in Y$ podemos escolher um $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$. Isso define uma aplicação $g\colon Y \longrightarrow X$ tal que $f(g(y)) = y$, para todo $y \in Y$. Logo, g é injetiva. Portanto, pelo Corolário 1.7, Y é enumerável. □

Corolário 1.9. *O produto cartesiano de dois conjuntos enumeráveis é um conjunto enumerável.*

Demonstração. Sejam X e Y dois conjuntos enumeráveis. Então, existem duas funções bijetivas $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow X$ e $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow Y$. Logo $\varphi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X \times Y$, dada por $\varphi(m, n) = (f(m), g(n))$ é sobrejetiva. Assim, devemos mostrar que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável, resultando pelo Corolário 1.8 que $X \times Y$ é enumerável. Consideremos a aplicação $\psi\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, dada por $\psi(m, n) = 2^m \cdot 3^n$. Pela unicidade da decomposição de um número natural em fatores primos, ψ é injetivo, resultando do Corolário 1.7 que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

□

Corolário 1.10. *A reunião de uma família enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável.*

[1] Essa existência de menor elemento é denominada Princípio da Boa Ordenação.

Demonstração. Sejam $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ enumeráveis. Então existem bijeções

$$f_1 \colon \mathbb{N} \longrightarrow X_1, f_2 \colon \mathbb{N} \longrightarrow X_2, ..., f_n \colon \mathbb{N} \longrightarrow X_n, ...$$

Tomando $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$, definimos a função $f \colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X$ colocando $f(m,n) = f_n(m)$. Podemos observar que f é sobrejetiva. De fato, para cada $n = 1, 2, \ldots$ fixado, variando m em todo conjunto $\mathbb{N}$, obtemos como imagem o conjunto X_n. Assim, variando os valores de n, obtemos todos os conjuntos X_n, ou seja, a imagem de f é X como descrito.

Pelo Corolário 1.8, $X_1 \cup X_2 \cup \ldots$ é enumerável.

O caso da reunião finita $X = X_1 \cup ... \cup X_n$ reduz-se ao anterior.

□

Corolário 1.11. *O conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável.*

Demonstração. Seja $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$. Como $\mathbb{Z}^* \subset \mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}$ é enumerável pelo Exemplo 1.3, segue que $\mathbb{Z}^*$ é enumerável pelo Corolário 1.7. Pelo Corolário 1.9, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ é enumerável. Definimos

$$\begin{array}{rccc} f\colon & \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & (m,n) & \longmapsto & \frac{m}{n} \end{array},$$

temos que tal função é sobrejetora, concluindo que $\mathbb{Q}$ é enumerável pelo Corolário 1.8. □

Exemplo 1.12. Sejam

$$c_{00} = \{x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \subset K : \xi_j = 0, \forall j \geq n \in \mathbb{N}\} \text{ e } \mathrm{D} = \{x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in c_{00} : \xi_j \in \mathbb{Q}, \forall j \in \mathbb{N}\}.$$

O conjunto D é enumerável.

De fato, o conjunto $\mathbb{Q}$ é enumerável pelo Corolário 1.11. Notemos que para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos mostrar que $\mathbb{Q}^n$ é enumerável utilizando indução e o Corolário 1.9. Ainda, como $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Q}^n$, a enumerabilidade de D segue do Corolário 1.10.

1.2 SUPREMO E ÍNFIMO

Definição 1.13. Seja $A \subset \mathbb{K}$, dizemos que:

1. A é limitado superiormente se existir $b \in \mathbb{K}$, tal que, $x \leq b$, para todo $x \in A$. Neste caso, diremos que b é uma cota superior de A.

2. A é limitado inferiormente se existir $a \in \mathbb{K}$, tal que, $a \leq x$ para todo $x \in A$. Neste caso diremos que a é uma cota inferior de A.

3. A é limitado se é limitado superiormente e inferiormente.

4. A menor das cotas superiores é chamada supremo de A e denotado por $\sup A$.

5. A maior das cotas inferiores é chamada ínfimo de A e denotado por $\inf A$.

Exemplo 1.14. Seja $A = \{x \in \mathbb{Q} : x > 1\}$. Veja que $\inf A = 1$, no entanto, não existe $\sup A$.

Exemplo 1.15. Seja $A = \{x \in \mathbb{Q} : 1 < x \leq 2$. Note que $\inf A = 1$ e $\sup A = 2$. Note ainda que $\sup A \in A$ e $\inf A \notin A$.

2 NOÇÕES TOPOLÓGICAS EM ESPAÇOS MÉTRICOS

Neste capítulo serão apresentadas noções topológicos preliminares. Nosso texto de referência foi [6], e as demais definições podem ser encontradas lá.

2.1 MÉTRICAS E EXEMPLOS

Definição 2.1. Dado um conjunto não-vazio X, chamamos de métrica em X uma função $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ que associa a cada par ordenado $(x, y) \in X \times X$ um número real $d(x, y)$, chamado de distância de x a y, que satisfaz três condições:

(1) $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(2) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetria);

(3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y), \forall x, y, z \in X$ (desigualdade triangular).

Um *e*spaço métrico é um par ordenado (X, d) em que X é um conjunto não-vazio e d é uma *m*étrica em X. Caso a métrica não precise ser identificada, diremos apenas espaço métrico X.

Exemplo 2.2. Seja $X = \mathbb{K}$ e $|x|$ a noção usual de módulo de um número x. A função $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ dada por $d(x, y) = |x - y|$ define uma métrica em X, denominada métrica usual. De fato, para $x, y, z \in X$, segue que:

(1) $d(x, y) = |x - y| \geq 0$ e $d(x, y) = |x - y| = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $d(x, y) = |x - y| = |-(y - x)| = |y - x| = d(y, x)$.

(3) $d(x, y) = |x-y| = |x-z+z-y| = |(x-z)+(z-y)| \leq |x-z|+|z-y| = d(x, z)+d(z, y)$.

Exemplo 2.3. Seja X um conjunto não-vazio e d uma função real de pares ordenados de elementos de X que satisfaz duas condições: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ e $d(x, y) \leq d(x, z)+d(y, z)$. Mostremos que d é uma métrica em X. De fato, para $x, y, z \in X$, segue que:

(1) $0 = d(x, x) \leq d(x, y)+d(x, y) \Rightarrow 0 \leq 2d(x, y) \Rightarrow d(x, y) \geq 0$. De $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ na hipótese, provamos o item (1) da Definição 2.1.

(2) Como $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, então

$$d(x,y) \le d(x,x) + d(y,x) \Rightarrow d(x,y) \le d(y,x) \text{ e}$$

$$d(y,x) \le d(y,y) + d(x,y) \Rightarrow d(y,x) \le d(x,y). \text{ Portanto, } d(x,y) = d(y,x).$$

(3) Do item (2) acima, segue, para todo $x, y, z \in X$, que:

$$d(x,y) \le d(x,z) + d(y,z) \Rightarrow d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y).$$

Exemplo 2.4. Sejam (X, d) um espaço métrico e $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$.

Mostremos que d_1 é uma métrica.

Por hipótese, d é uma métrica, logo segue que:

(1) $d(x,y) \ge 0$ e $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $d(x,y) = d(y,x)$.

(3) $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$.

Provemos agora que d_1 é uma métrica.

(1) É claro que $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} \ge 0$ e $d_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(2) $d_1(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1 + d(x,y)} = \dfrac{d(y,x)}{1 + d(y,x)} = d_1(y,x)$.

(3) Seja $f\colon [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = \dfrac{t}{1+t}$.

$$\begin{aligned}
d_1(x,y) = f(d(x,y)) &\le f(d(x,z) + d(z,y)) \\
&= \frac{d(x,z) + d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \\
&= \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(x,z) + d(z,y)} \\
&\le \frac{d(x,z)}{1 + d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1 + d(z,y)} \\
&= d_1(x,z) + d_1(z,y).
\end{aligned}$$

Portanto, $d_1(x,y) \le d_1(x,z) + d_1(z,y)$.

Exemplo 2.5. Para um dado conjunto X, podemos definir a chamada *métrica zero-um* em X da seguinte maneira:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x = y \\ 1, & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

para todo $x, y \in X$.

Definição 2.6. Em um espaço métrico X definimos, para dados $x \in X$ e $\epsilon > 0$, a *bola aberta de centro x e raio ϵ* como:

$$B(x;\epsilon) = \{y \in X : d(x;y) < \epsilon\}.$$

A *bola fechada* de centro x e raio ϵ é definida como:

$$B[x;\epsilon] = \{y \in X : d(x;y) \leq \epsilon\}.$$

Exemplo 2.7. Com a métrica zero-um em X, como na Definição 2.6, ocorre o seguinte:

$$B(x;\epsilon) = \begin{cases} X, & \text{se } \epsilon \geq 1 \\ \{x\}, & \text{se } \epsilon < 1 \end{cases}.$$

2.2 CONJUNTOS ABERTOS

Definição 2.8. Seja $G \subset X$.

1. Dizemos que G é *aberto* em X se dado qualquer ponto $x \in G$, existe um número real positivo ϵ tal que $B(x;\epsilon) \subset G$. Isto é, se todo ponto de G é centro de uma bola aberta contida em G.

2. Um ponto em G é chamado de *ponto interior* de G se, e somente se, é centro de alguma bola aberta contida em G. O *interior* de G é o conjunto de todos os seus pontos interiores e denotamos por $\text{int}(G)$ ou $\mathring{G}$.

Proposição 2.9. *O conjunto vazio ($\emptyset$) e o conjunto universo (X) são conjuntos abertos.*

Demonstração. Para um conjunto A não ser aberto, deve existir um $x \in A$ tal que para todo $\epsilon > 0$ ocorre que

$$B(x;\epsilon) \not\subseteq A.$$

No caso de $\emptyset$, tal elemento x não existe e, portanto, $\emptyset$ é aberto. Já no caso de X, temos que este é o conjunto universo, não existindo mais nada além dele, ou seja, para todo $x \in X$, vale que

$$B(x;\epsilon) \subset X,$$

decorrendo que X também é um conjunto aberto.

□

Proposição 2.10. *Toda bola aberta em X é um conjunto aberto.*

Demonstração. Sejam $x \in X$, $\epsilon > 0$ e $y \in B(x;\epsilon)$. Então, $d(y,x) < \epsilon$, ou seja, $\epsilon - d(y,x) > 0$. Tomemos $0 < \epsilon_1 < \epsilon - d(y,x)$.

Dado $a \in B(y;\epsilon_1)$, então $d(a,y) < \epsilon_1$. Logo, $a \in B(x;\epsilon)$, pois $d(a,x) \leq d(a,y) + d(y,x) \leq \epsilon_1 + d(y,x) < \epsilon$. Portanto, $B(y;\epsilon_1) \subset B(x;\epsilon)$ e $B(x;\epsilon)$ é aberto. □

Observação 2.11. O interior de um conjunto X é o maior aberto contido no mesmo. De fato, o interior de qualquer conjunto é um conjunto aberto pela proposição 2.10. Ainda, todo aberto A contido em X também está contid em $\mathring{X}$.

Proposição 2.12. *Um subconjunto G de X é aberto se, e somente se, é a união de bolas abertas.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $G = \emptyset$, então é a união de vazios e pela Proposição 2.9 é a união de abertos. Suponhamos $G \neq \emptyset$. Como G é um conjunto aberto, todo ponto deste conjunto é centro de uma bola aberta contida no mesmo. Portanto, G é a união de bolas abertas.

($\Leftarrow$) Assumiremos que G é a união de uma classe S de bolas abertas. Se $S = \emptyset$, então G é também o conjunto vazio e pela Proposição 2.9 concluímos que G é aberto. Agora consideremos $S \neq \emptyset$. Seja $x \in G$. Como G é a união de elementos de S, temos que $x \in B(x_0;\epsilon) \in S$, para algum $x_0 \in X$ e $\epsilon > 0$. E assim, pela demonstração da Proposiçao 2.10, x é centro de uma bola aberta $B(x;\epsilon_1) \subset B(x_0;\epsilon)$, para algum ϵ_1 com $0 < \epsilon_1 < \epsilon$. Logo, $B(x;\epsilon) \subset G$ e G é aberto. □

Proposição 2.13. *São válidas para um espaço métrico X as seguintes propriedades:*

1. *A união arbitrária de conjuntos abertos é aberta.*
2. *A interseção finita de conjuntos abertos é aberta.*

Demonstração. (1) Seja $\{G_i\}_i$ uma classe arbitrária de conjuntos abertos em X. Queremos provar que $G = \bigcup G_i$ é aberto. Se cada um dos $\{G_i\}$ é vazio, então G é vazio e pela Proposição 2.9, G é aberto. Suponhamos que G_i seja diferente do conjunto vazio. Então, pela Proposição 2.12, cada G_i é a união de bolas abertas, digamos $G_i = \bigcup\limits_j B_{ij}$. Assim, $G = \bigcup\limits_i G_i = \bigcup\limits_i \bigcup\limits_j B_{ij}$, ou seja, G é a união de bolas abertas. Portanto, G é aberto pela Proposição 2.12.

(2) Seja $\{G_i\}_i, i = 1, \ldots, n$, para algum, $n \in \mathbb{N}$ uma classe finita de conjuntos abertos em X. Queremos provar que $G = \bigcap G_i$ é aberta. Se algum dos G_i é vazio, então $G = \emptyset$ e pela Proposição 2.9, G é aberto. Suponhamos que $\{G_i\}_i = \{G_1, \ldots, G_n\}$, sendo cada um destes conjuntos diferentes do conjunto vazio. Seja $x \in G \neq \emptyset$, então $x \in G_i$, para

cada $i = 1, \ldots, n$. E como G_i é aberto, para cada i existe um número real positivo r_i tal que $B(x, r_i) \subset G_i$. Seja $0 < r < r_i, i = \{1, \ldots, n\}$. Então, $B(x, r) \subset B(x, r_i) \subset G_i$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim, $B(x, r) \subset G = \bigcap G_i$. Portanto, G é aberto. $\square$

Teorema 2.14. *Todo conjunto aberto $G \subset \mathbb{R}$ não vazio é a união de uma classe enumerável disjunta de intervalos abertos.*

Demonstração. Seja $x \in G$. Como G é aberto, x é o centro de um intervalo aberto limitado contido em G. Defina I_x pela união de todos os intervalos abertos que contém x e estão contidos em G.

Seja y um ponto em I_x, vejamos que $I_x = I_y$. Seja $z \in I_x$. Então, existe um intervalo aberto I contendo x tal que $z \in I$. Como, $y \in I_x$, existe um intervalo aberto J que contém x e y. Seja $M = I \cup J$. Então, M é um intervalo aberto contendo x, y e z. Logo, $z \in I_y$. Portanto, $I_x \subset I_y$. Segue de forma análoga que $I_y \subset I_x$. Sendo x e y quaisquer dois pontos distintos de G, então I_x e I_y são ou disjuntos ou idênticos. Considere a classe $\mathcal{I}$ de todos conjuntos distintos da forma I_x com $x \in G$. Isto é uma classe disjunta de intervalos abertos e G é essa união. Vejamos que tal união é enumerável.

Seja $G_r = \{q \in G; q \in \mathbb{Q}\}$. Temos G_r enumerável e não vazio. Definamos

$$\begin{array}{rccc} f\colon & G_r & \longrightarrow & \mathcal{I} \\ & q & \longmapsto & I_q \end{array},$$

em que I_q é o único intervalo que contém q. Como todo intervalo contém algum racional, segue que f é sobrejetora e, de G_r ser enumerável, resulta do Corolário 1.8 que $\mathcal{I}$ é enumerável. $\square$

2.3 CONJUNTOS FECHADOS

Ao longo desta seção iremos considerar X como um espaço métrico.

Definição 2.15. Seja A um subconjunto de X, um ponto $x \in X$ é chamado *ponto limite ou ponto de acumulação* de A se cada bola aberta centrada em x contiver pelo menos um ponto de A diferente de x.

O conjunto de todos os pontos limites é chamado de *conjunto derivado* de A e é denotado por A'. Dizemos ainda que um conjunto é $f$echado, se contém todos os seus pontos limites.

Denotamos por $\overline{A}$ o fecho de A, sendo $\overline{A} = A \cup A'$.

Podemos afirmar que $\overline{A} = \{x \in X; B(x; \epsilon) \cap A \neq \emptyset, \forall \epsilon > 0\}$.

Vale ressaltar que o fecho é o menor conjunto fechado que contém o conjunto.

Proposição 2.16. *O conjunto vazio e o conjunto universo são conjuntos fechados.*

Demonstração. Como o conjunto vazio não tem pontos, então $\emptyset = \overline{\emptyset}$. Portanto, $\emptyset$ é fechado. Ainda, como X é o conjunto universo, temos que ele contém todos os pontos, logo contém todos os pontos limites. Portanto, X é fechado, ou ainda, $X = \overline{X}$. □

Proposição 2.17. *Um subconjunto F de X é fechado se, e somente se, seu complementar $X - F$ é aberto.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Consideremos $F \neq \emptyset$. Dado $x \in X - F$, como F é um conjunto fechado e $x \notin F$, temos que x não é ponto limite de F, ou seja, existe $B(x, r)$ tal que $B(x, r) \cap F = \emptyset$. Logo temos que $B(x, r) \subset X - F$. Portanto, $X - F$ é aberto.

($\Leftarrow$) Como $X - F$ é aberto, temos que cada um dos seus pontos é centro de uma bola aberta disjunta de F. Logo, nenhum ponto de $X - F$ é ponto limite de F. Então, F contém todos os seus pontos limites. Portanto, F é um conjunto fechado. □

Proposição 2.18. *Toda bola fechada em X é um conjunto fechado.*

Demonstração. Sejam $B[x_0, r]$ uma bola fechada e o seu complementar $X - B[x_0, r]$. Tomemos $x \in X - B[x_0, r]$, então $d(x, x_0) > r$. Definimos $r_1 = d(x, x_0) - r$. Tomemos ainda a bola $B(x, r_1)$ e $y \in B(x, r_1)$. Logo $d(y, x) < r_1$. Então, $d(x_0, x) \leq d(x_0, y) + d(y, x) \Rightarrow d(y, x_0) \geq d(x, x_0) - d(y, x) > d(x, x_0) - r_1 = d(x, x_0) - [d(x, x_0) - r] = r$. Logo, $d(y, x_0) > r$ e $B(x, r_1) \subset X - B[x_0, r]$. Portanto, $X - B[x_0, r]$ é um conjunto aberto e, pelo Teorema 2.17, $B[x_0, r]$ é fechado. □

Teorema 2.19. *Em um espaço métrico X são válidas as seguintes propriedades:*

1. *A interseção arbitrária de conjuntos fechados em X é um conjunto fechado.*

2. *A união finita de conjuntos fechados em X é um conjunto fechado.*

Demonstração. (1) Seja $\{F_i\}$ uma classe arbitrária de subconjuntos fechados de X e $F = \cap F_i$. Temos que $X - F = \cup(X - F_i)$, sendo esta uma união de conjuntos abertos, fato justificado pela Proposição 2.17. Assim pela Proposição 2.13, concluímos que $X - F$ é aberto. Portanto, $F = \cap F_i$ é fechado, pela Proposição 2.17.

(2) Seja $\{F_i\}$ uma classe finita de subconjuntos fechados de X e $F = \cup F_i$. O complementar $X - F = \cap(X - F_i)$ é uma interseção finita de conjuntos abertos, sendo, portanto um conjunto aberto pela Proposição 2.13. Logo, F é fechado, pela Proposição 2.17, concluindo a demonstração. □

2.4 ALGUMAS PROPRIEDADES

Propriedade 1. *Seja X um espaço métrico, mostre que quaisquer dois pontos de X podem ser separados por bolas abertas.*

Demonstração. Sejam x, y pontos distintos de X e $r = d(x, y)$. Considere $B(x, \frac{r}{2})$ e $B(y, \frac{r}{2})$. Suponhamos que exista $z \in B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2})$. Então, $d(z, x) < \frac{r}{2}$ e $d(z, y) < \frac{r}{2}$. Como $r = d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} < r$. Acabamos obtendo $r < r$, o que não pode ocorrer . Portanto, $B(x, \frac{r}{2}) \cap B(y, \frac{r}{2}) = \emptyset$. $\square$

Em topologia geral, um espaço que satisfaça a propriedade anterior é denominado *E*spaço de Hausdorff.

Definição 2.20. Dado um espaço métrico X e um subconjunto $A \subset X$, o diâmetro de A é o número

$$d(A) = \sup\{d(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in A\}.$$

Propriedade 2. *O diâmetro de uma bola $B(x, r)$ não excede $2r$.*

De fato, dados $a, b \in B(x, r)$, temos

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) \leq 2r.$$

Propriedade 3. *Sejam $B(x, r)$ uma bola aberta em X, A um subconjunto de X com diâmetro menor que r e $x \in A$. Então $A \subset B(x, 2r)$.*

Demonstração. Sejam y e z dois pontos do conjunto A. Como o diâmetro de A é menor que r, temos que $d(y, z) < r$. Então, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < r + r = 2r$. Portanto, $A \subset B(x, 2r)$. $\square$

Propriedade 4. *Seja X um espaço métrico. Mostre que todo subconjunto de X é aberto se e somente se, todo subconjunto de X que consiste em um único ponto é aberto.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Da hipótese temos que todo subconjunto de X é aberto. Em particular, todo subconjunto unitário de X é aberto.

$(\Leftarrow)$ Da hipótese temos que todo subconjunto de X que consiste em um único ponto é aberto. Seja A um subconjunto de X, então $A = \bigcup_{a \in A} \{a\}$ e cada $\{a\}$ é aberto. Logo, A é a união qualquer de conjuntos abertos e pela Proposição 2.13, A é aberto. Portanto, todo subconjunto de X é aberto. $\square$

Definição 2.21. Um ponto $y \in X$ é chamado ponto de fronteira em A se toda bola aberta centrada nesse ponto intersecta A e $X - A$. O conjunto de todos os pontos de fronteira é chamado fronteira de A e denotado por $F_r A$.

Propriedade 5. *Sejam X um espaço métrico e A um subconjunto de X. Mostre que a fronteira de A é um conjunto fechado.*

Demonstração. Sabemos por definição que $\overline{A}$ é o menor conjunto fechado que contém A, $\overline{X - A}$ é o menor conjunto fechado que contém $X - A$. Assim, $\overline{A}$ e $\overline{X - A}$ são fechados. $F_rA = \overline{A} \cap \overline{X - A}$, por definição, ou seja, interseção finita de conjuntos fechados. Portanto, pela Proposição 2.19 temos que F_rA é fechado. □

Propriedade 6. *Sejam X um espaço métrico e A um subconjunto de X. Então A é fechado se e somente se contém sua fronteira.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como A é fechado, temos que, $A = \overline{A}$. De $F_rA = \overline{A} \cap \overline{X - A}$, o que segue por definição, temos $F_rA = A \cap \overline{X - A}$. Da propriedade 5, segue que, $F_rA \subset A \cap \overline{X - A}$, o que implica em, $F_rA \subset A$ e $F_rA \subset \overline{X - A}$. Portanto, A contém a sua fronteira.

($\Leftarrow$) Da hipótese temos que A contém a sua fronteira, ou seja, $F_rA = \overline{A} \cap \overline{X - A} \subset A$. É claro que $A \subset \overline{A}$ e vamos mostrar que $\overline{A} \subset A$. Seja $x \in \overline{A}$. Se x também pertence a $\overline{X - A}$, então é imediato que $x \in A$, agora, se $x \notin \overline{X - A}$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x; \epsilon) \cap (X - A) = \emptyset$. Logo, $B(x; \epsilon) \subset A$. Portanto, $x \in A$. Em resumo, $\overline{A} = A$ e A é fechado. □

2.5 CONVERGÊNCIA

Definição 2.22. Uma sequência em um espaço métrico X é uma função $x \colon \mathbb{N} \to X$ em que denotamos $x(n) = x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Denotaremos por sequências: (x_n) ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ou $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ou $\{x_n\}$.

Definição 2.23. Seja X espaço métrico e (x_n) uma sequência de pontos em X. Dizemos que (x_n) é uma sequência *convergente* se existe um ponto $x \in X$ tal que, para todo $\epsilon > 0$, vale:

(1) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \epsilon$.

Ou, de outra maneira:

(2) Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x; \epsilon), \forall n \geq n_0$.

O ponto x é chamado de *limite* da sequência (x_n).

Definição 2.24. Seja X um espaço métrico e (x_n) uma sequência em X. Dizemos que (x_n) é uma *sequência de Cauchy* se:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \epsilon.$$

Proposição 2.25. *Toda sequência convergente em X é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente com limite x. Então:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por consequência:

$$\forall m, n \geq n_0,\ d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) = \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

□

Teorema 2.26. *Dado $A \subset X$, X espaço métrico, $x \in \overline{A}$ se, e somente se, existe (x_n) em A, tal que $x_n \to x$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Da hipótese $x \in \overline{A}$, então $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$. Segue que existe $x_n \subset A$ com $x_n \to x$.

($\Leftarrow$) Suponha que $x \notin \overline{A}$. Então, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x, \epsilon) \cap A = \emptyset$. Mas da hipótese temos que existe $(x_n) \in A$, com $x_n \to x$. Absurdo. Portanto, $x \in \overline{A}$.

□

Nem toda sequência de Cauchy em X é uma sequência convergente em X. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.27. Considere o subespaço $X = (0, 1]$ de $\mathbb{R}$ com a métrica usual. A sequência $x = (\frac{1}{n})$ é de Cauchy, mas não é uma sequência convergente em X. De fato, $0 \notin X$.

Definição 2.28. Um espaço métrico X em que toda sequência de Cauchy é convergente é chamado de espaço métrico *completo*.

Teorema 2.29. *Sejam X um espaço métrico completo e Y um subespaço métrico de X. Então Y é completo se, e somente se, é fechado.*

Demonstração. Suponhamos que Y seja um subespaço métrico completo de X. Seja y um ponto de acumulação de Y. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, a bola $B(y; 1/n)$ contém um ponto $y_n \in Y$. Claro que $y_n \longrightarrow y$ em X e (y_n) é sequência de Cauchy em Y. Pela completude de Y, segue que $y \in Y$ e portanto Y é fechado.

Agora, suponhamos Y fechado. Seja (y_n) uma sequência de Cauchy em Y. Então, (y_n) é de Cauchy en X, implicando que $y_n \longrightarrow x$ em X. Como Y é fechado, segue do Teorema 2.26 segue que $x \in Y$ e, portanto, Y é completo. □

2.6 CONTINUIDADE E CONTINUIDADE UNIFORME

Definição 2.30. Sejam (X, d_1), (Y, d_2) espaços métricos e uma função $f\colon X \to Y$.

1. Dizemos que f é *c*ontínua em um ponto $x_0 \in X$ se uma das seguintes condições forem satisfeitas:

   - Para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, $d_1(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_2(f(x), f(x_0)) < \epsilon$.
   - Para cada bola aberta $B(f(x_0), \epsilon)$, existe uma bola aberta $B(x_0, \delta)$, tal que $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \epsilon)$.

   Diremos que f é *c*ontínua se as condições acima acontecem independentemente do ponto $x_0 \in X$, ou seja, é contínua em todos os pontos de seu domínio.

2. Dizemos que f é *u*niformemente contínua quando dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

   $$d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \epsilon,$$

   para todo $x, y \in X$, ou seja, para cada ϵ podemos encontrar um δ que funcione uniformemente em todo o espaço X.

Observação 2.31. Podemos afirmar, inclusive, que as duas condições são equivalentes. No caso das bolas, elas são consideradas nas respectivas métricas de cada espaço. É evidente que toda função uniformemente contínua é contínua. De fato, para todo x_0 fixado na definição de continuidade, basta trocar y por x_0 na definição de continuidade uniforme.

Nem toda função contínua é uniformemente contínua. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.32. Aqui consideramos a métrica usual de $\mathbb{R}$ via módulo. Seja a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Dados $0 < \epsilon < 1$ e $\delta > 0$ quaisquer, tomemos um número natural $n > \dfrac{1}{\delta}$, $x = \dfrac{1}{n}$ e $y = \dfrac{1}{2n}$. Então, $|y - x| = \dfrac{1}{n} < \delta$, mas $|f(y) - f(x)| = 2n - n = n \geq 1 > \epsilon$. Portanto, não é uniformemente contínua.

Exemplo 2.33. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.
O caso $a = 0$, é trivial, já que a função é constante. Tomemos $a \neq 0$. Como $|f(x) - f(y)| = |a||x - y|$, dado $\epsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \dfrac{\epsilon}{|a|}$ de forma que:

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Portanto, f é uniformemente contínua.

Teorema 2.34. *Sejam X e Y espaços métricos e $f\colon X \to Y$. Então, f é contínua em x_0 se, e somente se, $x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$.*

Demonstração. Para a prova deste teorema, não é necessário fazer distinção entre as métricas em X e em Y.

($\Rightarrow$) Assumiremos que f é contínua em x_0. Se (x_n) é uma sequência em X tal que $x_n \to x_0$, queremos provar que $f(x_n) \to f(x_0)$. Seja $\epsilon > 0$. Considere a bola aberta $B(f(x_0), \epsilon)$. Como f é contínua em x_0, segue que existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \epsilon)$.
Da hipótese, $x_n \to x_0$, ou seja, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in B(x_0, \delta)$, para todo $n \geq n_0$. Então, $f(x_n) \in B(f(x_0), \epsilon)$, para todo $n \geq n_0$. Portanto, $f(x_n) \to f(x_0)$.
($\Leftarrow$) Assumiremos que f não é contínua em x_0 e vamos mostrar que $x_n \to x_0$ não implica em $f(x_n) \to f(x_0)$. Como f não é contínua em x_0, existe uma bola aberta $B(f(x_0), \epsilon)$, tal que, $f(B(x_0, \delta)) \nsubseteq B(f(x_0), \epsilon)$ para todo $\delta > 0$. Considere a sequência de bolas abertas

$$B(x_0, 1), B(x_0, \frac{1}{2}), \ldots, B(x_0, \frac{1}{n}), \ldots.$$

Assim, para cada n, existe $x_n \in B(x_0, \frac{1}{n})$ de forma que $f(x_n) \notin B(f(x_0), \epsilon)$. Portanto, $x_n \to x_0$, mas $f(x_n) \nrightarrow f(x_0)$. □

Teorema 2.35. *Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \longrightarrow Y$. Então, f é contínua, se e somente se, $x_n \to x \Rightarrow f(x_n) \to f(x)$, para todo $x \in X$.*

Demonstração. Segue como consequência imediata do teorema anterior. Pois, uma função é contínua se for contínua em cada um dos pontos do seu domínio.

□

Corolário 2.36. *Sejam X e Y espaços métricos e $f : X \longrightarrow Y$. Então, f é contínua, se e somente se, $f^{-1}(G)$ é aberto em X sempre que G é aberto em Y.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Assumiremos o fato de que f é contínua e G é aberto em Y. Queremos provar que $f^{-1}(G)$ é aberto em X. Se $f^{-1}(G)$ é vazio, a demonstração é imediata. Consideremos $f^{-1}(G)$ não vazio. Seja, $x \in f^{-1}(G)$, então, $f(x) \in G$, e como G é aberto, existe uma bola aberta $B(f(x), \epsilon) \subseteq G$ para algum $\epsilon > 0$. Do fato de f ser contínua em x, segue que existe $\delta > 0$ tal que $f(B(x, \delta)) \subseteq B(f(x), \epsilon)$. Logo, $f(B(x, \delta)) \subseteq G$ e, assim, $B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(G)$. Portanto, $f^{-1}(G)$ é aberto.
($\Leftarrow$) Assumiremos que $f^{-1}(G)$ é aberto em X sempre que G é aberto em Y e vamos mostrar que f é contínua. Iremos mostrar a continuidade em um ponto arbitrário $a \in X$. Então, para qualquer $\epsilon > 0$, $f^{-1}(B(f(a), \epsilon))$ é um conjunto aberto que contém a. Logo existe $\delta > 0$ tal que:

$$B(a, \delta) \subset f^{-1}(B(f(a), \epsilon)).$$

Portanto, $d_1(x;a) < \delta \Rightarrow d_2(f(x);f(a)) < \epsilon$, em que d_1 e d_2 são métricas em X e Y respectivamente, ou seja, f é contínua em a. $\square$

Teorema 2.37. *Sejam X e Y espaços métricos e $f\colon X \to Y$. Então, f é uniformemente contínua se, e somente se, para todo par de sequências (x_n), (y_n) em X com $\lim(y_n - x_n) = 0$, $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Assumiremos que f é uniformemente contínua e que $\lim(y_n - x_n) = 0$. Queremos provar que $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$. Segue da hipótese que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que: $x, y \in X$, $d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d_2(f(y), f(x)) < \epsilon$. Existe também $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $d_1(y_n, x_n) < \delta$. Disso tudo, $f(y_n) - f(x_n) < \epsilon, \forall n \geq n_0$. Portanto, $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\lim(y_n - x_n) = 0$ implica em $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = 0$. Se f não fosse uniformemente contínua, existiria um $\epsilon > 0$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$, encontraríamos pontos $x_n, y_n \in X$, tais que $|y_n - x_n| < \dfrac{1}{n}$ e $|f(y_n) - f(x_n)| \geq \epsilon$. Contradição. Portanto, f deve ser uniformemente contínua. $\square$

Este último resultado é muito importante quando queremos provar que uma função não é uniformemente contínua.

Exemplo 2.38. A função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, não é uniformemente contínua. Dados $x_n = n$ e $y_n = \dfrac{n+1}{n}$, temos que $\lim(y_n - x_n) = \lim\left(\dfrac{1}{n}\right) = 0$. No entanto, $f(y_n) - f(x_n) = 1 + \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{n^2} - n^2$, logo $\lim[f(y_n) - f(x_n)] = -\infty$, ou seja, este último limite não é nulo. Portanto, $f(x) = x^2$ não é uniformemente contínua.

Exemplo 2.39. Mostremos que a função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$, não é uniformemente contínua. De fato, a partir das sequências $(x_n) = \left(\sqrt{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}}\right)$ e $(y_n) = \left(\sqrt{(2n+3)\dfrac{\pi}{2}}\right)$, temos que:

$$\lim(x_n - y_n) = \lim \frac{-\pi}{\sqrt{(2n+1)\dfrac{\pi}{2}} + \sqrt{(2n+3)\dfrac{\pi}{2}}} = 0.$$

Mas, $\operatorname{sen}(x_n^2) = \operatorname{sen}((2n+1)\frac{\pi}{2}) = \pm 1$ e $\operatorname{sen}(y_n^2) = \operatorname{sen}((2n+3)\frac{\pi}{2}) = \mp 1$. Logo, $|f(x_n) - f(y_n)| = 2$, ou seja,

$$\lim |f(x_n) - f(y_n)| \neq 0.$$

Portanto, f não é uniformemente contínua pelo Teorema 2.37.

2.7 COMPACIDADE

Definição 2.40. Seja X um espaço métrico.

1. Uma classe $\mathcal{G} = \{G_i\}$, de conjuntos abertos de um espaço métrico X, é uma *c*obertura aberta de X, se cada ponto de X pertence ao menos a um elemento da classe G. Isto é, $\cup_i G_i = X$.

2. Uma subclasse de uma cobertura aberta, que ainda é uma cobertura aberta, é denominada *s*ubcobertura.

3. Um espaço métrico é *c*ompacto se toda cobertura aberta possui subcobertura finita.

4. Um espaço métrico Y é um subespaço compacto de um espaço métrico X, se for compacto na topologia induzida de X, ou seja, abertos de Y são os conjuntos da forma $G_Y = G \cap Y$, em que G é um aberto de X.

Proposição 2.41. *Todo subespaço fechado de um espaço compacto é compacto.*

Demonstração. Seja Y um subespaço fechado de um espaço compacto X e seja $\{G_i\}$ uma cobertura aberta de Y.

Logo, $G_i = H_i \cap Y$, em que H_i é um aberto de X. Como Y é fechado, então $X - Y$ é aberto. Disso,

$$\mathcal{G} = \bigcup_i H_i \cup (X - Y)$$

é uma cobertura aberta de X que admite subcobertura finita, pois X é compacto. Se $X - Y$ está nesta subcobertura, descartamos o mesmo, podendo considerar a nova cobertura com n elementos, digamos $H_1 \ldots, H_n$. Portanto, Y admite uma subcobertura aberta finita que é constituída dos elementos $H_1 = G_1 \cap Y, \ldots, H_n = G_n \cap Y$ associados. □

Proposição 2.42. *Seja $f\colon X \longrightarrow Y$ contínua, com X compacto. Então, $f(X)$ é compacto.*

Demonstração. Consideremos $\mathcal{G} = \{G_i\}$ uma cobertura aberta de $f(X)$. Então, cada $f^{-1}(G_i)$ é um aberto em X. Em particular, $\bigcup_i f^{-1}(G_i)$ é uma cobertura aberta de X. Portanto, existe uma subcobertura finita, digamos formada pelos n conjuntos $f^{-1}(G_1), \ldots, f^{-1}(G_n)$. Disto,

$$\bigcup_{j=1}^{n} G_j = f(X)$$

é uma cobertura aberta de $f(X)$.

□

Definição 2.43. Seja X um espaço métrico. Dizemos que:

1. X tem a *p*ropriedade de Bolzano-Weierstrass se todo subconjunto infinito de X tem um ponto limite.

2. X é *s*equencialmente compacto se toda sequência em X admite subsequência convergente.

Proposição 2.44. *Um espaço métrico é sequencialmente compacto se, e somente se, tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que X seja sequencialmente compacto e consideremos um subconjunto infinito $A \subset X$. Tomemos (x_n) uma sequência pontos distintos de A. Então, existe subsequência (x_{n_j}) convergente para $x \in A$. Pelo Teorema 2.26, $x \in \overline{A}$, em particular, $x \in A'$.

($\Leftarrow$) Assumamos agora que todo subconjunto infinito A de X tenha ponto de acumulação. Considere (x_n) sequência em X. Se (x_n) não tiver infinitos pontos distintos, então terá uma infinidade de termos repetidos, resultando diretamente na existência de uma subsequência convergente. Se nenhum termo de (x_n) se repete infinitamente, então podemos afirmar que o conjunto $A = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é infinito, resultando por hipótese que admite ponto de acumulação $x \in X$, ou seja, pelo Teorema 2.26, existe subsequência (x_{n_j}) que converge para x, isto é, X é sequencialmente compacto. $\square$

Proposição 2.45. *Todo espaço métrico compacto tem a propriedade de Bolzano-Weierstrass.*

Demonstração. Sejam X um espaço métrico compacto e $A \subset X$ um subconjunto infinito. Suponha que A não admita ponto de acumulação. Assim, dado $x \in X$, existe $\epsilon > 0$ tal que $B(x;\epsilon) \cap A$ tem, no máximo, um elemento de A, podendo ser vazio. Considerando tais bolas, a união das mesmas forma uma cobertura aberta de X. Da compacidade de X, podemos extrair uma subcobertura finita, o que implica em A ser finito, pois A está contido no conjunto dos centros das bolas desta subcobertura. $\square$

Definição 2.46. Um número $a > 0$ é chamado *n*úmero de Lebesgue para uma dada cobertura aberta $\mathcal{G} = \{G_i\}$ de um espaço métrico X, se cada subconjunto de X com diâmetro menor que a está contido em, pelo menos, um G_i.

Proposição 2.47. *(Lema da Cobertura de Lebesgue) Se X é um espaço métrico sequencialmente compacto, então toda cobertura aberta admite um número de Lebesgue.*

Demonstração. Sejam X um espaço métrico sequencialmente compacto e $\mathcal{G} = \{G_i\}$ uma cobertura aberta de X. Diremos que um subconjunto de X é *G*rande se não está contido em nenhum G_i da cobertura. Se não existe um tal conjunto, então qualquer número positivo serve como número de Lebesgue.

Vamos assumir que conjuntos *G*randes existem. Seja a' o ínfimo dos diâmetros destes conjuntos. Claro que $0 \leq a' \leq \infty$.

Notemos que se $a' = \infty$, então qualquer número real positivo serve como número de Lebesgue. De fato, como neste caso todos os conjuntos Grandes tem diâmetro infinito, todo conjunto que tiver diâmetro finito estará contido em algum G_i. Por isso, qualquer real positivo serviria como número de Lebesgue neste caso.

Mostremos que $a' > 0$. Para isso, suponhamos que $a' = 0$. Como todo conjunto Grande deve ter ao menos dois pontos, de $a' = 0$ concluímos que para todo $n \in \mathbb{N}$, existe B_n conjunto grande, tal que, $0 < d(B_n) < \frac{1}{n}$

Para cada B_n, escolhemos um x_n, formando uma sequência (x_n). De X ser sequencialmente compacto, a sequência (x_n) admite subsequência convergindo para $x \in X$.

Ocorre que $x \in G_{i_0}$ para algum G_{i_0} da cobertura aberta. Do fato de G_{i_0} ser aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset G_{i_0}$. Consideremos $B(x, r/2)$. É fato que existe $n_0 \in \mathbb{N}$, que pode ser tomado como $1/n_0 < r/2$, tal que

$$n \geq n_0 \implies x_n \in B(x, r/2).$$

Agora, $d(B_{n_0}) < 1/n_0 < r/2$, segue da Propriedade 3 que

$$B_{n_0} \subset B(x, r) \subset G_{i_0},$$

contradizendo o fato de que B_{n_0} é um conjunto grande.

□

Definição 2.48. Seja X um espaço métrico.

a) Dado $\epsilon > 0$, um subconjunto A de X é chamado ϵ-rede se A é finito e $X = \bigcup_{a \in A} B(a, \epsilon)$, ou seja, se A é finito e todos os pontos de X distam menos do que ϵ de A.

b) X é dito ser *t*otalmente *l*imitado se tem uma ϵ-rede para todo $\epsilon > 0$.

Observação 2.49. Todo conjunto totalmente limitado é limitado. De fato, se X tem uma ϵ-rede, então

$$d(X) \leq d(A) + 2\epsilon,$$

sendo $d(A) < \infty$, pois A é finito.

Proposição 2.50. *Todo espaço métrico sequencialmente compacto é totalmente limitado.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Escolhamos $a_1 \in X$ e consideremos $B(a_1, \epsilon)$. Se $X = B(a_1, \epsilon)$, então $\{a_1\}$ é uma ϵ-rede. Caso contrário, seja $a_2 \in X$ fora de $B(a_1, \epsilon)$. Se $X = B(a_1, \epsilon) \cup B(a_2, \epsilon)$, terminamos com $\{a_1, a_2\}$ sendo uma ϵ-rede. Senão, seja a_3 fora das duas bolas anteriores. Se desta forma continuamos, para algum $n \in \mathbb{N}$ teremos

$$X = B(a_1, \epsilon) \cup B(a_2, \epsilon) \cup \ldots \cup B(a_n, \epsilon).$$

De fato, se isso não ocorresse, (a_n) seria uma sequência que não admite subsequência convergente e X não seria sequencialmente compacto.

Portanto, $\{a_1, \ldots, a_n\}$ seria uma ϵ-rede. $\square$

Observação 2.51. Se a sequência (a_n) admitisse subsequência convergente para algum $x \in X$, digamos (a_{n_k}) com $a_{n_k} \longrightarrow x$, então para o $\epsilon > 0$ dado, ocorreria para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ que

$$n_k \geq n_0 \implies a_{n_k} \in B(x, \epsilon/4).$$

Em particular, dados a_{n_k} e a_{n_j} distintos, a distância entre eles seria menor que $\epsilon/2$, pela Propriedade 3 e $a_{n_j} \in B(a_{n_k}, \epsilon)$, o que não ocorre na construção da demonstração da proposição anterior.

Teorema 2.52. *Todo espaço métrico sequencialmente compacto X é compacto.*

Demonstração. Seja $\mathcal{G} = \{G_i\}$ uma cobertura aberta de X. Pela Proposição 2.47, esta cobertura admite um número de Lebesgue a.

Pela proposição anterior, dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar uma ϵ-rede

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

com $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \epsilon)$.

Com $\epsilon = a/3$, temos

$$d(B(a_k, \epsilon)) = 2\epsilon = 2a/3 < a.$$

Pela definição de número de Lebesgue, para cada k podemos encontrar um G_{i_k} tal que

$$B(a_k, \epsilon) \subset G_{i_k}.$$

Como $X = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \epsilon)$, a classe

$$\{G_{i_1}, G_{i_2}, \ldots, G_{i_n}\}$$

é uma subcobertura finita de X e, portanto, X é compacto.

$\square$

Teorema 2.53. *Em resumo, provamos que as seguintes propriedades são equivalentes para um espaço métrico X:*

- *ser compacto;*
- *ser sequencialmente compacto;*
- *ter a propriedade de Bolzano-Weierstrass.*

Teorema 2.54. *Sejam X e Y espaços métricos, com X compacto, e $f\colon X \to Y$ contínua. Então f é uniformemente contínua.*

Demonstração. Sejam d_1 e d_2 as métricas em X e Y, respectivamente. Dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in X$, considere sua imagem $f(x)$ e uma bola aberta $B(f(x), \frac{\epsilon}{2})$. Como f é contínua,pelo Teorema 2.36, a imagem inversa $f^{-1}(B(f(x)\frac{\epsilon}{2})$ é um subconjunto aberto de X. Obtemos uma cobertura aberta de X formado por estas bolas. Como X é compacto, pela proposição 2.50, essa cobertura aberta admite um número de Lebesgue δ.

Portanto, dados $z, w \in X$, se $d_1(z, w) < \delta$, então $\{z, w\}$ tem diâmetro menor que δ. Logo, $z, w \in f^{-1}(B(f(x), \frac{\epsilon}{2})$ para algum $x \in X$. Em resumo, pela Propriedade 3, obtemos que

$$d_1(z, w) < \delta \implies d_2(f(z), f(w)) < \epsilon.$$

Isso conclui a demonstração.

□

3 ESPAÇOS DE BANACH

Para compreendermos os conceitos que virão, é importante reforçarmos alguns conceitos mais iniciais.

Definição 3.1. Sejam V um conjunto, $x, y, z \in V$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, em que $\mathbb{K}$ é um corpo. V é chamado de *espaço vetorial* se existem duas operações $+ \colon V \times V \longrightarrow V$ e $\cdot \colon \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ satisfazendo as seguintes propriedades:

(1) $x + y = y + x$ (comutativa);

(2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (associativa);

(3) Existe um elemento $w \in V$ tal que $x + w = x$, para todo $x \in V$. Denotamos $w = 0$ e o denominamos *elemento neutro*;

(4) Para todo elemento $x \in V$, existe um único elemento $-x$ em V tal que $x + (-x) = w$. $-x$ é denominado *oposto* de x ;

(5) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (distributiva);

(6) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (distributiva em relação aos escalares);

(7) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$;

(8) $1 \cdot x = x$.

Os elementos de um espaço vetorial são chamados *v*etores.

Definição 3.2. Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$.
Uma função $T \colon V \to W$ é uma *transformação linear* se, para quaisquer $x, y \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, valem as seguintes propriedades:

(1) $T(x + y) = T(x) + T(y)$;

(2) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$.

Em alguns textos os itens (1) e (2) são unificados, definindo T como linear se $T(\alpha(x + y)) = \alpha T(x) + \alpha T(y)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in V$.

A partir de agora consideraremos espaços sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Definição 3.3. Dizemos que $W \subset V$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial V se, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e $x, y \in W$, satisfaz as seguintes propriedades:

1. $x + y \in W$;

2. $\alpha x \in W$.

W é também um espaço vetorial. A partir destas duas propriedades é possível concluir.

Definição 3.4. Sejam V e W dois espaços vetoriais sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $T\colon V \to W$ uma transformação linear. O conjunto $\{v \in V\colon T(v) = 0\}$ é chamado núcleo de T e denotado por $KetT$.

Teorema 3.5. *Seja $T\colon V \to W$ uma aplicação linear. Então $KerT = \{x \in V : T(x) = 0\}$ é um subespaço vetorial de V. Em particular, T é injetora se, e somente se, o núcleo de T consiste apenas do elemento neutro.*

Demonstração. Provar que $KerT$ é um espaço vetorial segue das propriedades de transformação linear. Vejamos a segunda parte.

($\Rightarrow$) Suponhamos que T é injetora, ou seja, $T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, $\forall x_1, x_2 \in V$. Considere $x \in Ker(T)$. Como T ser uma transformação linear, temos que $T(0) = 0$. De tudo isso, $T(x) = T(0) = 0 \Rightarrow x = 0$. Portanto, o núcleo de T possui apenas o elemento neutro.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $Ker(T) = \{0\}$. Dados $x_1, x_2 \in E$, temos que,

$$T(x_1) = T(x_2) \Rightarrow T(x_1) - T(x_2) = 0 \Rightarrow T(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 \in Ker(T).$$

Mas da hipótese, o núcleo possui apenas o elemento neutro. Logo, $x_1 - x_2 = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$. Portanto, T é injetora. □

Teorema 3.6. *Seja $T : V \to W$ uma transformação linear. Se V é espaço vetorial, então $T(V)$ também é espaço vetorial.*

Demonstração. A prova segue das propriedades de V e T. □

3.1 ESPAÇOS NORMADOS

Definição 3.7. A distância de um elemento $x \in V$ até a origem é chamada de *n*orma e é denotada por $\|x\|$. Três condições devem ser satisfeitas por uma norma:

(1) $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$;

(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Podemos escrever $\|\cdot\|\colon X \to [0,\infty)$, isto é, qualquer norma pode ser vista como uma função.

Dizemos que $(V, \|\cdot\|)$ é um *espaço normado*, ou simplesmente, V, caso a norma não precise ser especificada.

Um espaço normado pode sempre ser visto como um espaço métrico, em que a métrica induzida pela norma da seguinte maneira:

$$d(x,y) = \|x-y\|, \forall x,y \in X.$$

Não é difícil provar que d é uma métrica, chamada *métrica natural*.

Exemplo 3.8. Nem todo espaço métrico é um espaço normado. Basta considerar X espaço métrico que não seja espaço vetorial.

Exemplo 3.9. Seja $\mathcal{R}$ o conjunto das funções reais limitadas e integráveis a Riemann no intervalo $[0,1]$. $\mathcal{R}$ é um espaço vetorial e $\mathcal{C}[0,1]$, o espaço das funções contínuas em $[0,1]$, é um subespaço vetorial de $\mathcal{R}$. Definimos a norma de uma função $f \in \mathcal{C}[0,1]$ por:

$$\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Mostremos que $\mathcal{C}[0,1]$ é um espaço normado com a norma acima. Para $f,g \in \mathcal{C}[0,1]$, segue que:

(1) $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx \geq 0$ e $\displaystyle\int_0^1 |f(x)|dx = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$, pois f é contínua no intervalo $[0,1]$.

(2) $\displaystyle\|\alpha f\| = \int_0^1 |\alpha f(x)|dx = \int_0^1 |\alpha||f(x)|dx = |\alpha|\|f\|$.

(3) Por último a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}
\|f+g\| &= \int_0^1 |f(x)+g(x)|dx \\
&\leq \int_0^1 (|f(x)|+|g(x)|)dx \\
&= \int_0^1 |f(x)|dx + \int_0^1 |g(x)|dx \\
&= \|f\| + \|g\|.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Exemplo 3.10. Seja $\mathbb{L}[0,1]$ o espaço vetorial das funções reais limitadas no intervalo $[0,1]$. Definamos para cada $f \in \mathbb{L}[0,1]$

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\}$$

Mostremos que $\mathbb{L}[0,1]$ é um espaço normado. $\mathbb{L}[0,1]$ é um espaço vetorial. Sejam $f, g \in \mathbb{L}[0,1]$. Então:

(1) É claro que $\|f\| = \sup\{|f(x)-g(x)|; x \in [0,1]\} \geq 0$. Também, $\|f-g\| = \sup\{|f(x)-g(x)|; x \in [0,1]\} = 0$ implica, diretamente, em $f \equiv 0$.

(2) Seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:

$$\begin{aligned}\|\lambda f\| &= \sup\{|\lambda f(x)|; x \in [0,1]\}\\ &= \sup\{|\lambda||f(x)|; x \in [0,1]\}\\ &= |\lambda| \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\}\\ &= |\lambda|\|f\|\end{aligned}$$

(3) Por último, a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}\|f+g\| =& \sup\{|f(x)+g(x)|; x \in [0,1]\}\\ \leq& \sup\{|f(x)|+|g(x)|; x \in [0,1]\}\\ \overset{(*)}{\leq}& \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\} + \sup\{|g(x)|; x \in [0,1]\}\\ =& \|f\| + \|g\|.\end{aligned}$$

A desigualdade apresentada em (*) vem do fato que, para todo $x \in [0,1]$, vale $|f(x)| + |g(x)| \leq \sup\{|f(x)|; x \in [0,1]\} + \sup\{|g(x)|; x \in [0,1]\}$. Tomando o supremo ao lado esquerdo da desigualdade, o resultado segue.

Portanto, podemos definir a métrica natural:

$$d(f,g) = \|f-g\| = \sup\{|f(x)-g(x)|; x \in [0,1]\}.$$

3.2 DEFINIÇÃO E EXEMPLOS DE ESPAÇOS DE BANACH

Definição 3.11. *Espaço de Banach* é um espaço vetorial normado completo, ou seja, em que toda sequência de Cauchy é convergente na métrica natural definida pela norma correspondente.

3.2.1 $\mathcal{C}([0,1])$: E A IMPORTÂNCIA DA MÉTRICA

Para demonstrarmos dois exemplos, é necessário utilizar do seguinte teorema:

Teorema 3.12. *Sejam $f_n \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma sequência de funções e $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f e cada f_n é contínua no ponto $a \in X$, então f é contínua no ponto a.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Como $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para f, por definição

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}, \forall x \in X.$$

Da continuidade de f_n, para um dado $n \in \mathbb{N}$, segue que:

$$\exists \delta_n > 0 : x \in X, \|x - a\| < \delta \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(a)\| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Então, para $\|x - a\| < \delta_n$, $n \geq n_0$, temos

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(a)\| =& \|f(x) - f_n(x) + f_n(x) + f_n(a) - f_n(a) - f(a)\| \\ \leq& \|f_n(x) - f(x)\| + \|f_n(x) - f_n(a)\| + |f_n(a) - f(a)\| \\ <& \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon\end{aligned}$$

Portanto, f é contínua no ponto a. □

Exemplo 3.13. Seja $\mathcal{C}([0,1]) = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R} : \text{ f é contínua } \}$. Definimos

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| \text{ e } d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Provemos que $\mathcal{C}([0,1])$ com a métrica acima é um espaço métrico completo.

Seja $\epsilon > 0$.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{C}([0,1])$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(f_n, f_m) < \epsilon, \tag{3.1}$$

ou seja, $\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$. Assim, para cada $x \in [0,1]$, $(f_n(x))$ é convergente (aqui temos uma *convergência pontual*). Isso pelo fato de $\mathbb{R}$ ser completo. Definimos $f(x) = \lim f_n(x), \forall x \in [0,1]$.

Vamos mostrar agora que f é contínua, além de $\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_n(x)| \to 0$.

Existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n \geq N \Rightarrow \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}.$$

Então, $|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leq \lim_{m\to\infty} \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$. Logo, $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{\epsilon}{2}$. Portanto, $f_n \to f$.

A continuidade de f segue do Teorema 3.12.

Portanto, provamos que se $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy, então é convergente e assim o espaço é completo.

Exemplo 3.14. Para cada $f \in \mathcal{C}[0,1]$ definimos a norma dada por $\|f\| = \int_0^1 |f(x)|dx$. Seja $g \in \mathcal{C}[0,1]$, então definimos como métrica em $\mathcal{C}[0,1]$ a função d dada por:

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|dx.$$

Provemos que o espaço $\mathcal{C}([0,1])$ com a métrica acima não é um espaço métrico completo.

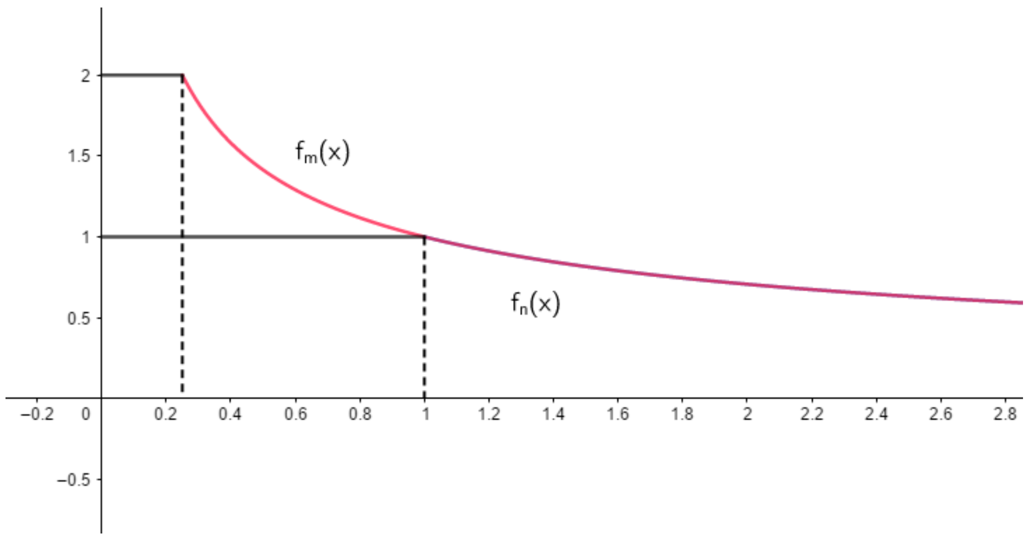
Seja $\mathcal{R}([0,1])$ o conjunto das funções integráveis segundo Riemann em $[0,1]$. Assim, $C([0,1]) \subset \mathcal{R}([0,1])$. Este fato pode ser encontrado em [3, pag.130, Teorema 5].

Considere a sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C([0,1])$, definida da seguinte forma:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x \geq \dfrac{1}{n^2} \\ \\ n, & \text{se } x < \dfrac{1}{n^2} \end{cases}.$$

Vejamos o exemplo plotado abaixo, considerando $n = 1$ e $m = 2$. Vale destacar que, neste caso, para $x \geq 1$ os dois gráficos se sobrepõe.

Figura 1 – gráficos de f_1 e f_2



Utilizando a figura acima, que pode facilitar nossa compreensão, podemos concluir para dados $m, n \in \mathbb{N}$ com $m > n$:

$$
\begin{aligned}
d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_m(x) - f_n(x)|dx = \int_0^{\frac{1}{m^2}} |m-n|dx + \int_{\frac{1}{m^2}}^{\frac{1}{n^2}} \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - n\right| dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^1 |0|dx \\
&= \frac{m-n}{m^2} + \frac{2}{n} - \frac{1}{n} - \frac{2}{m} + \frac{n}{m^2} \\
&= \frac{m-n}{mn} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m}
\end{aligned}
$$

Logo, $d(f_m - f_n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|$. Portanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Seja $M \geq 1$ uma cota superior de f. Então, para $n \geq M$, temos que:

$$
\begin{aligned}
d(f, f_n) &= \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|dx \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{M^2}} |f(x) - f_n(x)|dx \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{n^2}} |f(x) - f_n(x)|dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{M^2}} |f(x) - f_n(x)|dx \\
&\geq \int_0^{\frac{1}{n^2}} |n - M|dx + \int_{\frac{1}{n^2}}^{\frac{1}{M^2}} \left|\frac{1}{\sqrt{x}} - M\right| dx \\
&= \frac{n-M}{n^2} + \frac{2}{M} - \frac{1}{M} - \frac{2}{n} - \frac{M}{n^2} \\
&= \frac{1}{M} - \frac{1}{n}
\end{aligned}
$$

Assim, $d(f, f_n) \geq \left|\frac{1}{M} - \frac{1}{n}\right|$. Então, $\lim_{n\to\infty} d(f, f_n) \geq \frac{1}{M}$, ou seja, o limite não é nulo. Logo, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma sequência convergente. Portanto, o espaço métrico não é completo.

3.2.2 ESPAÇO DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES CONTÍNUAS

Nesta seção, E e F sempre são espaços normados.

Definição 3.15. Dada uma aplicação linear $T\colon E \to F$, seja $\|T\|$ definido por :

$$\|T\| = sup\{\|Tx\|\colon x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

T é dita limitada se $\|T\| < \infty$

Proposição 3.16. *Dado uma aplicação linear $T\colon E \to F$, as seguintes condições são equivalentes:*

a) T é limitada.

b) T é uniformemente contínua.

c) T é contínua.

d) T é contínua na origem.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Se T é limitada, então $\|Tx\| \leq \|T\|$, para todo $x \in E, \|x\| \leq 1$. E portanto, $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\|$, para todo $x \in E$. Segue que, $\|T(x-y)\| \leq \|T\| \cdot \|x-y\|$, para todo $x, y \in E$. Logo, $\|T(x)-T(y)\| = \|T(x-y)\| \leq \|T\| \cdot \|x-y\|$, para todo $x, y \in E$. Portanto, T é uniformemente contínua.
$(b) \Rightarrow (c)$ Como T é uniformemente contínua, T é contínua.
$(c) \Rightarrow (d)$ Como T é contínua, ou seja, contínua em todos os pontos do seu domínio, T é contínua na origem.
$(d) \Rightarrow (a)$ Se (a) não for verdadeiro, então existiria uma sequência (x_n) em E, tal que, $\|x_n\| \leq 1$ e $\|Tx_n\| \geq n$, para cada n. Seja, $y_n = \dfrac{x_n}{\|Tx_n\|}$, para cada n. Então, $\|y_n\| \leq \dfrac{1}{n}$ e $\|Ty_n\| = 1$, para cada n. Portanto, T não seria contínua na origem, pois $T(0) = 0$.

□

Corolário 3.17. *Seja $T\colon E \to F$ uma aplicação linear. Então T é contínua se e só se existe uma constante $c > 0$, tal que, $\|Tx\| \leq c \cdot \|x\|$, para todo $x \in E$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que T seja contínua. Pela proposição 3.16, temos que, T é limitada. Então, $\|T\| = sup\{\|Tx\| \colon x \in E, \|x\| \leq 1\}$ é finito. E para $x \in E, x \neq 0$, segue que:

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \sup\{\|Ty\|, \|y\| \leq 1\}$$

Assim, $\|Tx\| \leq sup\{\|Ty\|, \|y\| \leq 1\} \cdot \|x\|$, para todo $x \neq 0$. Portanto, tomando $c = \sup\{\|Ty\|, \|y\| \leq 1\}$, temos $\|Tx\| \leq c \cdot \|x\|$, para todo $x \in E$.

$(\Leftarrow)$ Suponhamos que exista $c > 0$, tal que, $\|Tx\| \leq c \cdot \|x\|$, para todo $x \in E$. Então, para $x, y \in E$, segue que, $\|T(x-y)\| \leq c \cdot \|x-y\|$, logo $\|T(x)-T(y)\| \leq c \cdot \|x-y\|$, para todo $x, y \in E$. Portanto, T é contínua. □

Denotaremos por $L_\alpha(E; F)$ o espaço vetorial de todas as aplicações lineares $T\colon E \longrightarrow F$. Denotaremos por $L(E; F)$ o subespaço de todas os $T \in L_\alpha(E; F)$ que são contínuas. Os elementos de $L_\alpha(E; F)$ são usualmente chamados de operadores lineares.

Definição 3.18. O espaço $L(E, \mathbb{K})$, denotado por $E^{'}$, é chamado dual de E.

Definição 3.19. Diremos que $T \in L(E; F)$ é um *isomorfismo topológico* se T é bijetivo e seu inverso é contínuo.

Proposição 3.20. *A função $T \to \|T\|$ é uma norma em $L(E; F)$. Se F é um espaço de Banach, então $L(E; F)$ também é um espaço de Banach.*

Demonstração. A função $T \to \|T\|$ é uma norma em $L(E;F)$. Provaremos que se F é completo, então $L(E;F)$ é completo. Seja (T_n) uma sequência de Cauchy em $L(E;F)$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que, $\|T_n - T_m\| \leq \epsilon$, para todo $m, n \geq n_0$. Segue que,

$$\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\|\|x\| \leq \epsilon\|x\|, \forall m, n \geq n_0, x \in E. \tag{3.2}$$

Então $(T_n x)$ é uma sequência de Cauchy em F, para cada $x \in E$. Como F é completo, existe o limite $\lim T_n x$. Definamos $T\colon E \longrightarrow F$ por $Tx = \lim_n T_n x$. Fazendo $m \to \infty$ em (3.2), temos,

$$\|T_n x - Tx\| \leq \epsilon\|x\|, \forall n \geq n_0.$$

Logo, $\|T_n - T\| \leq \epsilon$, e portanto $T_n - T \in L(E;F)$, para todo $n \geq n_0$.
Assim, $T = (T - T_n) + T_n \in L(E;F)$ e $\|T_n - T\| \to 0$. □

Corolário 3.21. *O dual de um espaço normado é sempre um espaço de Banach*

Demonstração. Sejam $T \to \|T\|$ uma norma em $L(E;F)$ e $L(E;K)$ o dual desse espaço. É claro que K é completo, pois por definição $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Portanto, pela Proposição 3.20 segue que $L(E;K)$ é um espaço de Banach. □

Proposição 3.22. *Dado $T \in L(E;F)$, prove que:*

$$\begin{aligned}\|T\| &\overset{(1)}{=} \sup\{\|Tx\|\colon x \in E, \|x\| < 1\}\\ &\overset{(2)}{=} \sup\{\|Tx\|\colon x \in E, \|x\| = 1\}\\ &\overset{(3)}{=} \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\colon x \in E, x \neq 0\right\}\\ &\overset{(4)}{=} \inf\{c > 0\colon \|Tx\| \leq c\|x\|, \forall x \in E\}\end{aligned}$$

Demonstração. **Provemos a igualdade (1):** Sejam $\mathcal{A} = \{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| \leqslant 1\}$, $\mathcal{B} = \{\|T(x)\| : x \in E, \|x\| < 1\}$, $a = \sup\mathcal{A}$ e $b = \sup\mathcal{B}$. Então,

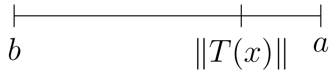
$$\text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } x \in B_E[0;1], \text{ tal que } , a - \epsilon \leqslant \|T(x)\|$$

e

$$\text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } x \in B_E(0;1, \text{ tal que } , \ b - \epsilon \leqslant \|T(x)\|$$

Note que $b \leqslant a$.

Suponha, agora, $b < a$. Então, existe $x \in B_E[0;1]$, com $b < \|T(x)\|$, conforme abaixo:



Claro que, pela definição de b, $\|x\| < 1$ não pode ocorrer. Só nos resta $\|x\| = 1$.

Se $\|x\| = 1$, podemos construir (x_n) tal que $x_n \longrightarrow x$ e $\|x_n\| < 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tome, por exemplo, $x_n = x - \dfrac{x}{n} = \dfrac{nx - x}{n} = \dfrac{(n-1)}{n}x$. Segue que $\|x_n\| = \dfrac{(n-1)}{n}\|x\| < \|x\| = 1$ e $x_n \longrightarrow x$. Como T é contínua, $T(x_n) \longrightarrow T(x)$.

Portanto, podemos considerar uma sequência (x_n) tendendo a x, com $\|x_n\| < 1$. Temos pela continuidade de T que $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ e, ainda, que $\|T(x_n)\| \longrightarrow \|T(x)\|$. Sendo assim, para algum $n \in \mathbb{N}$, ocorre $b < \|T(x_n)\|$. Um absurdo, já que $b = \sup \mathcal{B}$. Logo, $b = a$ e provamos a primeira igualdade.

Provemos a igualdade (2): É claro que

$$b = \sup\{\|Tx\| \colon x \in E, \|x\| = 1\} \leq \sup\{\|Tx\| \colon x \in E, \|x\| \leq 1\} = c.$$

Suponhamos que $\sup\{\|Tx\| \colon x \in E, \|x\| = 1\} < \sup\{\|Tx\| \colon x \in E, \|x\| \leq 1\}$.

Agora, se $x \in E$ é tal que $0 < \|x\| \leq 1$, então

$$\|T(x)\| = \|x\| \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq b.$$

Logo, $b = c$ como queríamos mostrar.

Provemos a igualdade (3): Temos a seguinte igualdade de conjuntos:

$$\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}; x \in E, x \neq 0\right\} = \{\|Ty\| : y \in E, \|y\| = 1\}.$$

Logo, a igualdade (3) é imediata.

Provemos a igualdade (4): Notemos que

$$\begin{aligned}\inf\{c > 0 \colon \|Tx\| \leq c\|x\|, \forall x \in E\} &= \inf\left\{c > 0 \colon \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, x \in E, x \neq 0\right\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \colon x \in E, x \neq 0\right\}\end{aligned}$$

De fato, por definição o supremo de um conjunto é o ínfimo das cotas superiores. $\square$

3.3 ESPAÇOS NORMADOS COMPLETOS DE SEQUÊNCIAS

Nesta seção $\mathbb{K}^n$ denota o produto cartesiano de $\mathbb{K}$ n vezes.

3.3.1 DESIGUALDADES DE HÖLDER E MINKOWSKI

Lema 3.23. *Sejam $a, b, \alpha, \beta > 0$, com $\alpha + \beta = 1$. Então, $a^\alpha b^\beta \leq a\alpha + b\beta$. Ocorrendo a igualdade se, e somente se, $a = b$.*

Demonstração. Da hipótese $\beta = 1-\alpha$, então, queremos mostrar que $a^{\alpha}b^{1-\alpha} \leq a\alpha + b(1-\alpha)$. Ou seja,

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha} \leq \frac{a\alpha}{b} + (1-\alpha). \tag{3.3}$$

Considere a função $\phi(t) = \alpha t + 1 - \alpha - t^{\alpha}, (t > 0)$.

Então, $\phi'(t) = \alpha - \alpha t^{\alpha - 1}$. Da hipótese temos que $0 < \alpha < 1$, logo

$$\begin{cases} \phi'(t) < 0, & \text{se } 0 < t < 1 \\ \\ \phi'(t) > 0, & \text{se } t > 1 \end{cases}.$$

Portanto, a função ϕ é estritamente decrescente em $(0,1)$ e estritamente crescente em $(1,\infty)$. Como $\phi(1) = 0$, segue que $\phi(t) > 0$ se $t > 0, t \neq 1$. Logo, provamos a Desigualdade (3.3), sendo que a igualdade ocorre se, e somente se, $a = b$. □

Teorema 3.24 (Desigualdade de Hölder para somas). *Sejam* $1 < p, q < \infty$, *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $n \in \mathbb{N}$ *e* $(\xi_1, ..., \xi_n), (\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathbb{K}^n$. *Então:*

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Demonstração. Sejam $a_j = \dfrac{|\xi_j|^p}{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p}, b_j = \dfrac{|\eta_j|^q}{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^q}, \alpha = \dfrac{1}{p}$ e $\beta = \dfrac{1}{q}$.

Segue do Lema 3.23 que:

$$\frac{|\xi_j \eta_j|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{a_j}{p} + \frac{b_j}{q}.$$

Agora,

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} |\xi_j \eta_j|}{\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p} \sum_{j=1}^{n} a_j + \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} b_j = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Portanto,

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

□

Corolário 3.25 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz para somas). *Sejam* $(\xi_1, ..., \xi_n), (\eta_1, ..., \eta_n) \in \mathbb{K}^n$. *Então:*

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Segue do teorema 3.24.

□

Proposição 3.26 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam $1 \leq p < \infty$, $n \in \mathbb{N}$ e $(\xi_j), (\eta_j) \in \mathbb{K}^n$. Então,*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.4}$$

Demonstração. Comecemos com somas finitas variando até n, em que n é um natural dado. Para $p = 1$ a desigualdade é clara. Seja $p > 1$. Segue que:

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p = \sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j||\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j||\xi_j + \eta_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{n} |\eta_j||\xi_j + \eta_j|^{p-1}.$$

Com $(p-1)q = p$, segue do Teorema 3.24, que:

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j||\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} |\eta_j||\xi_j + \eta_j|^{p-1} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Logo,

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p \leq \left\{\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right\} \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Como $1 - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p}$, segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

3.4 ESPAÇOS ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$

Definição 3.27. Dado $1 \leq p < \infty$, o espaço ℓ_p é definido por:

$$\ell_p = \left\{(\xi_n)_{n=1}^{\infty} : \xi_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty\right\}$$

Proposição 3.28. *ℓ_p é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_p$, para cada $(\xi_j) \in \ell_p$, dada por $\|(\xi_j)\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.*

Demonstração. Vamos, inicialmente, verificar que $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$, para cada $x, y \in \ell_p$.

Passando para séries, o que é obtido ao final da demonstração da Proposição 3.26, obtemos:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Assim, como é limitada e monótona não decrescente a sequência das somas parciais, concluímos que converge a série $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ (ver [3, Teorema 4, p. 26]) obtendo, portanto, a Desigualdade (3.4) em uma versão para séries. Segue da Proposição 3.26 que ℓ_p é um espaço vetorial e que $\|\cdot\|_p$ é uma norma em ℓ_p. Provemos que ℓ_p é completo.

Seja, (x_n) uma sequência de Cauchy em ℓ_p, com $x_n = (\xi_{nj})_{j=1}^{\infty}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que,

$$\|x_n - x_m\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{nj} - \xi_{mj}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

Em particular, $|\xi_{nj} - \xi_{mj}| \leq \|x_n - x_m\|_p \leq \epsilon$, para todo $m, n \geq n_0$ e todo $j \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{K}$ é completo, do fato de $(\xi_{nj})_{j=1}^{\infty}$ ser uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $\xi_j = \lim_n \xi_{nj}$. Escrevamos $x = (\xi_j)_{j=1}^{\infty}$.

Temos que,

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |\xi_{nj} - \xi_{mj}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{nj} - \xi_{mj}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon, \forall n, m \geq n_0, k \in \mathbb{N}.$$

Como, $\left(\sum_{j=1}^{k} |\xi_{nj} - \xi_{mj}|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$, fazendo $m \to \infty$, segue, para $k \in \mathbb{N}$, que:

$$\left(\sum_{j=1}^{k} |\xi_{nj} - \xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon.$$

Logo, $\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_{nj} - \xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Assim, $x_n - x \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p \leq \epsilon$, para todo $n \geq n_0$. Disso, $x_n \in \ell_p$ e $\|x_n - x\|_p \to 0$. Portanto, ℓ_p é um espaço de Banach. □

Definição 3.29. Dado $p = \infty$, o espaço ℓ_∞ é definido por:

$$\ell_\infty = \left\{ x = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} : \xi_j \in \mathbb{K}, \sup_j \|\xi_j\| < \infty \right\}.$$

Proposição 3.30. *ℓ_∞ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_\infty$, para cada $(\xi_j) \in \ell_\infty$, dada por $\|(\xi_j)\|_\infty = \sup\{|\xi_1|, ..., |\xi_n|, \ldots\}$.*

Demonstração. $\|\cdot\|_\infty$ é uma norma. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em ℓ_∞, com $x_n = (\xi_{nj})$. Então, para todo $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \ge n_0 \Rightarrow \|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon \Rightarrow \max\{|\xi_{n1} - \xi_{m1}|, \cdots |\xi_{nj} - \xi_{mj}|\} \le \epsilon. \tag{3.5}$$

Em particular, $|\xi_{nj} - \xi_{mj}| \le \|x_n - x_m\|_\infty < \epsilon$, para todo $n, m \ge n_0$ e $j \in \mathbb{N}$. Logo, (ξ_{nj}) é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$.

Sejam $\xi_j = \lim \xi_{nj}$ e $x = (\xi_j)$. Provemos que $x \in \ell_\infty$ e que (x_n) converge para x.

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, obtemos de (3.5) que

$$n \ge n_0 \Rightarrow \|x_n - x\|_\infty < \epsilon \Rightarrow \max\{|\xi_{n1} - \xi_1|, \cdots |\xi_{nj} - \xi_j|\} \le \epsilon.$$

Ainda, da desigualdade triangular satisfeita por $\|\cdot\|_\infty$, resulta que se $x, y \in \ell_\infty$, segue que $x + y \in \ell_\infty$. Mas,

$$x = (x + (-x_n)) + x_n.$$

Como $x - x_n \in \ell_\infty$ e $x_n \in \ell_\infty$, segue que $x \in \ell_\infty$.

□

3.4.1 SEPARABILIDADE DOS ESPAÇOS ℓ_p, $1 \le p \le \infty$

Definição 3.31. Um espaço métrico X é dito separável se existir um subconjunto enumerável $D \subset X$ que é denso em X, ou seja, $\overline{D} = X$.

Proposição 3.32. *ℓ_p, com a norma $\|\cdot\|_p$, é separável para cada $1 \le p < \infty$.*

Demonstração. Sejam $c_{00} = \{(\xi_j)_{j=1}^\infty : \xi_j \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\xi_j = 0$ para todo $j \ge k\}$ e $D = \{(\xi_j)_{j=1}^\infty \in c_{00} : \xi_j \in \mathbb{Q}\}$.

Do Exemplo 1.12, segue que D é enumerável. De fato, podemos escrever

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Q}^n.$$

Provemos que D é denso em ℓ_p.

Sejam $x = (\xi_j) \in \ell_p$ e $\epsilon > 0$. Como $\sum_{j=1}^\infty |\xi_j|^p < \infty$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{j=n+1}^\infty |\xi_j|^p < \epsilon^p$.

Do fato de $\mathbb{Q}$ ser denso em $\mathbb{R}$, podemos tomar $y = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0, 0, ...)$ e $z = (\zeta_1, ..., \zeta_n, 0, 0, 0, ...)$, com $\zeta_1, ..., \zeta_n$ racionais, tais que:

$$\sum_{j=1}^{n} |\xi_j - \zeta_j|^p < \epsilon^p.$$

Então, $y \in c_{00}, z \in D$ e

$$\|x - z\|_p \leq \|x - y\|_p + \|y - z\|_p < 2\epsilon.$$

Assim, D é denso em ℓ_p. Portanto, ℓ_p separável. □

Proposição 3.33. *ℓ_∞ não é separável.*

Demonstração. Sejam (x_n) um subconjunto enumerável de ℓ_∞ com $x_n = (\xi_{nj})_{j=1}^{\infty}$. Definimos $x = (\xi_{jj})$ da seguinte forma:

$$x = \begin{cases} \xi_j = \xi_{jj} + 1, & \text{se } |\xi_{jj}| \leq 1 \\ \\ \xi_j = 0, & \text{se } |\xi_{jj}| \geq 1 \end{cases}.$$

Pela definição temos que $x \in \ell_\infty$.

Agora, $\|x - x_j\|_\infty \geq |\xi_j - \xi_{jj}| \geq 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ não é denso em ℓ_∞. Portanto, ℓ_∞ não é separável.

□

3.5 ESPAÇOS NORMADOS DE DIMENSÃO FINITA

Nesta última seção estudamos os espaços normados de dimensão finita. Demais definições e resultados podem ser encontrados em [5, p. 20]

Definição 3.34. Denotaremos $\mathbb{K}_p^n$ o espaço vetorial $\mathbb{K}^n$, munido da norma $\|.\|_p$.

Teorema 3.35. *$\mathbb{K}_p^n$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $x_j = (\xi_{j1}, \xi_{j2}, \cdots, \xi_{jn})$, com x_j uma sequência de Cauchy. Então,

$$\text{Para todo } \epsilon > 0, \text{ existe } j_0 \in \mathbb{N}, \text{ tal que }, j, m \geq j_0 \Rightarrow \|x_j - x_m\|_p < \epsilon, \forall i = 1, \cdots, n.$$

Logo $\left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_{ni} - \xi_{mi}|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \epsilon$. Segue que para cada $i \in \mathbb{N}, (\xi_{ji})$ é de Cauchy. Então $\xi_{ji} \to a_i$, pois $\mathbb{K}$ é completo. Assim, $|\xi_{ji} - a_i| < \epsilon$. Logo, $x_j \to a = (a_1, \cdots, a_i)$. Portanto, $\mathbb{K}_p^n$ é espaço de Banach. □

Teorema 3.36. *Todos os espaços normados de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ são topologicamente isomorfos entre si.*

Demonstração. Sejam E um espaço normado de dimensão n sobre $\mathbb{K}$ e $(e_1, \cdots, e_n)$ uma base de E. Seja $T\colon \mathbb{K}_2^n \longrightarrow E$ definido por

$$Tx = \sum_{j=1}^{n} \xi_j e_j, \forall x = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{K}_2^n.$$

Queremos mostrar que E é topologicamente isomorfo a $\mathbb{K}_2^n$, seguindo a definição 3.19. De fato T é bijetiva.

Segue do Corolário 3.25 que

$$\|Tx\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\xi_j| \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|x\|.$$

Portanto, T é contínua.

Mostremos então que T^{-1} é contínua. Consideremos a esfera unitária S de $\mathbb{K}_2^n$:

$$S = \{x = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{K}_2^n : \sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2 = 1\}.$$

Pelo Teorema de Bolzano- Weierstrass (ver [4, p. 17, Teorema 5]), toda sequência limitada em $\mathbb{K}^n$ admite subsequência convergente, ou seja, S é sequencialmente compacto, sendo, pelo Teorema 2.52, um subconjunto compacto de $\mathbb{K}_2^n$. Como $\|Tx\| > 0$ para todo $x \in S$. Segue que existe $c > 0$ tal que $\|Tx\| \geq c$ para todo $x \in S$, pois $x \longmapsto \|T(x)\| \in \mathbb{R}$ é contínua e aqui utilizamos do Teorema de Heine-Borel (ver [6, p. 114]). Portanto, $\|Tx\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{K}_2^n$.

□

Teorema 3.37. *Cada espaço normado de dimensão finita é completo.*

Demonstração. Seja E espaço normado de dimensão n. Pelo teorema 3.36 que $T : \mathbb{K}_p^n \longrightarrow E$ é um isomorfismo topológico. Então toda sequência de Cauchy em $\mathbb{K}_p^n$ será, via imagem, uma sequência de Cauchy em E. Segue do Teorema 3.35 que $\mathbb{K}_p^n$ é completo. Portanto, E é completo, ou seja, cada espaço de dimensão finita é completo. □

Outra demonstração deste Teorema pode ser encontrada em [1, p. 5].

Corolário 3.38. *Cada subespaço de dimensão finita de um espaço normado é fechado.*

Demonstração. Seja E um subespaço de dimensão finita. Pelo teorema 3.37 temos que E é completo. Segue do Teorema 2.29, E é fechado. Portanto, cada subespaço de dimensão finita é fechado. □

REFERÊNCIAS

[1] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de Análise Funcional**. Rio de Janeiro: SBM, 2015.

[2] LIMA, E. L. **Espaços Métricos**. 2ª Edição. Rio de Janeiro: IMPA, 1983.

[3] LIMA, E. L. **Análise Real**. 10ª Edição, vol. 1. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[4] LIMA, E. L. **Curso de Análise**. 11ª Edição, vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.

[5] MUJICA, J. **Notas de Aula de Análise Funcional**. UNICAMP, 2003.

[6] SIMMONS, G.F. **Introduction to Topology and modern analysis**. Malabar, Florida, 1983.

[7] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear**. São Paulo, 2013.